

и выбирая нужным способом λ_1 , мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам, сходным со случаем $n = 2$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$u_{xx} + u u_{yy} = 0$$

и привести его к каноническому виду в области гиперболичности.

2. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $u_{xx} + x u_{yy} = 0$.

б) $u u_{xx} - x u_{yy} + u_x + u u_y = 0$.

в) $e^{2x} u_{xx} + 2e^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$.

г) $u_{xx} + (1+y)^2 u_{yy} = 0$.

д) $x u_{xx} + 2\sqrt{xy} u_{xy} + y u_{yy} - u_x = 0$.

е) $(x-y) u_{xx} + (xy-y^2-x+y) u_{xy} = 0$.

ж) $y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u_x = 0$.

з) $\sin^2 y u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.

и) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

3. Привести к каноническому виду и максимально упростить уравнение

$$a u_{xx} + 2a u_{xy} + a u_{yy} + b u_x + c u_y + u = 0; a, b, c - \text{постоянные.}$$

4. Введя функцию $v = u e^{\lambda x + \mu y}$ и выбирая соответствующим образом параметры λ и μ , упростить следующие уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + \gamma u = 0$.

б) $u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{yy} + a u_x + b u_y$.

в) $u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{yy} = a u_x + b u_y + \gamma u$.

г) $u_{xy} = a u_x + b u_y$.

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

обычно называют уравнением колебаний струны. В настоящей главе, как и в последующих, мы ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений.

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач

1. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x . Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ точки x в момент t .

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x, u) и что вектор смещения u перпендикулярен в любой момент к оси x ; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x, t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука¹⁾. Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

¹⁾ С. П. Стрелков, Механика, «Наука», 1965.

Пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны (x_1, x_2) . Длина дуги этого участка равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда

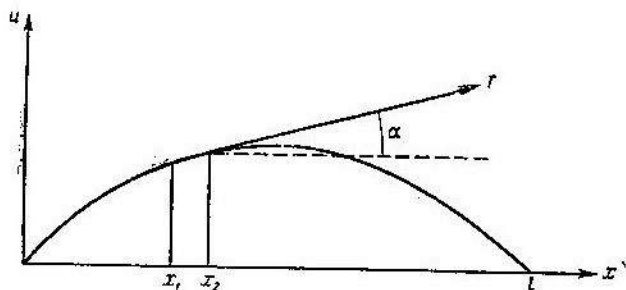


Рис. I.

в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке не меняется со временем. Покажем также, что натяжение не зависит и от x , т. е.

$$T(x) = T_0 = \text{const.}$$

Найдем проекции натяжения на оси x и u (обозначим их T_x и T_u):

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha \cong T(x) u_x,$$

где α — угол касательной к кривой $u(x, t)$ с осью x . На участок (x_1, x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю (мы рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси u , то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \text{ или } T(x_2) = T(x_1). \quad (1)$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение не зависит от x , т. е. для всех значений x и t

$$T(x) = T_0. \quad (2)$$

После сделанных предварительных замечаний перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний струны. Воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка струны (x_1, x_2) по оси u равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi, \quad \approx u_t(x, t) \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) d\xi$$

где ρ — линейная плотность струны. Приравняем изменение количества движения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения в точках x_2 и x_1 и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью (нагрузкой) $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = & \int_{x_1}^{x_2} u_{tt}(\xi, t) \rho(\xi) d\xi \Delta t \\ = & \int_{x_1}^{x_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3) \end{aligned}$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от $u(x, t)$. Тогда формула (3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$u_{tt}(\xi^*, t^*) \rho(\xi^*) \Delta t \Delta x = \{T_0 [u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\} \Delta t \Delta x,$$

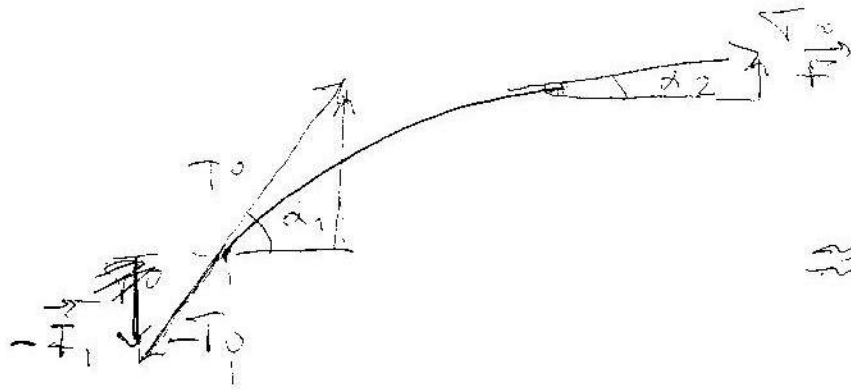
где

$$\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ а } t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2).$$

1) Делая предположение о двукратной дифференцируемости функций, мы фактически уславливаемся о том, что будем рассматривать лишь функции, обладающие этим свойством. Таким образом, подобного типа предположение связано с ограничением круга изучаемых физических явлений и не содержит в себе утверждения, что не существует функций, удовлетворяющих интегральному уравнению колебаний и не имеющих вторых производных. Такие функции существуют и представляют значительный практический интерес. Подробнее см. об этом § 2, п. 7.

Теперь остается лишь (исходя из)

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi)$$



$$\vec{F} - \vec{F}_1 = T_0 \vec{e}_t \Delta x_2 - T_0 \vec{e}_t \Delta x_1 =$$

$$\vec{F}_0(x_2 = x_1) = T_0 \left(u_x \right) \Big|_{x=x_2} - u_x \Big|_{x=x_1}$$

$$u_t(x, t + \Delta t) \rho(x) dx - \text{mass balance } t + \Delta t \text{ b.s. } x$$

$$u_t(x, t) \rho(x) dx - \text{mass balance } t \text{ b.s. } x$$

$$\left[u_t(x, t + \Delta t) - u_t(x, t) \right] \rho(x) dx \text{ mass excess, mass } \Delta t \text{ b.s. } x$$

$$F(x + \Delta x) = T_0 u_x(x + \Delta x, t) \text{ ~~force~~ - curve, get sign wrong in } \Delta x \text{ b.s. } x + \Delta x$$

$$F(x) = T_0 u_x(x, t) \text{ ~~force~~ $\xrightarrow{+f(x,t)\Delta t}$ mass in curve.}$$

$$\left[F(x + \Delta x) - F(x) \right] \Delta t = \left[u_t(x, t + \Delta t) - u_t(x, t) \right] \rho(x) dx$$

$$\overset{\parallel}{T_0} u_{xx} dx \Delta t = u_{tt} \rho(x) dx \cdot \Delta x$$

Сократив на $\Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (4)$$

В случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$ этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right), \quad (5)$$

где

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (6)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

или

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

Если в точке x_0 ($x_1 < x_0 < x_2$) приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$ (рис. 2), то уравнение (3) запишется так:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] d\xi - \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при $x_1 \rightarrow x_0$ и $x_2 \rightarrow x_0$ интегралы в левой части этого равенства стремятся к нулю, и равенство (3) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [u_x(x_0+0, \tau) - u_x(x_0-0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $t_2 \rightarrow t_1$, получим:

$$u_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения

$$\left. \begin{aligned} u(x_0+0, t) &= u(x_0-0, t), \\ u_x(x_0+0, t) - u_x(x_0-0, t) &= - \frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке x_0 , зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0 .

2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0, l)$ оси x . Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x, t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x^1). При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x, x + \Delta x)$ в момент t . Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta \Delta x, t) \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим, что относительное удлинение в точке x определяется функцией $u_x(x, t)$. В силу

¹⁾ Выбранная здесь геометрическая переменная x называется переменной Лагранжа. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x . Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x , в любой последующий момент t находится в точке с координатой $X = x + u(x, t)$. Если мы фиксируем некоторую геометрическую точку A с координатой X , то в различные моменты времени в этой точке будут находиться различные физические точки (с разными лагранжевыми координатами x). Часто пользуются также переменными Эйлера X, t , где X — геометрическая координата. Если $U(X, t)$ — смещение точки с эйлеровой координатой X , то лагранжева координата

$$x = X - U(X, t).$$

Пример использования координат Эйлера приведен в п. 6

закона Гука натяжение $T(x, t)$ равно

$$T(x, t) = k(x) u_x(x, t), \quad (9)$$

где $k(x)$ — модуль Юнга в точке x ($k(x) > 0$).

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2) u_x(x_2, \tau) - k(x_1) u_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (10)$$

где $F(x, t)$ — плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функции $u(x, t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход¹⁾ при $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$, приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня²⁾

$$[k(x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \quad (11)$$

Если стержень однороден ($k(x) = \text{const}$, $\rho = \text{const}$), то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \quad (12)$$

где

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \quad (13)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

3. Энергия колебаний струны. Найдём выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + U$, где K — кинетическая и U — потенциальная энергия. Элемент струны dx , движущийся со скоростью $v = u_t$, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx (u_t)^2 \quad (m = \rho dx).$$

¹⁾ В дальнейшем мы будем опускать подробности, связанные с предельными переходами, которые были разобраны при выводе уравнения поперечных колебаний струны.

²⁾ Условие малости колебаний в данном случае связано только с границей применимости закона Гука. В общем случае $T = k(x, u_x) u_x$, и мы приходим к квазилинейному уравнению

$$[k(x, u_x) u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t).$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2 dx. \quad (14)$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t = t_0$ форму $u(x, t_0) = u_0(x)$, равна работе, которую надо совершить, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение $u_0(x)$. Пусть функция $u(x, t)$ даёт профиль струны в момент t , причем

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

Элемент dx под действием равнодействующей сил натяжения

$$T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x = T u_{xx} dx$$

за время dt проходит путь $u_t(x, t) dt$. Работа, производимая всей струной за время dt , равна

$$\left\{ \int_0^l T_0 u_{xx} u_t dx \right\} dt = \left\{ T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt} dx \right\} dt = \\ = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt.$$

Интегрируя по t от 0 до t_0 , получаем:

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt = \\ = -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt.$$

Нетрудно выяснить смысл последнего слагаемого правой части этого равенства. Действительно, $T_0 u_x \Big|_{x=0}$ есть величина натяжения на конце струны $x = 0$; $u_t(0, t) dt$ — перемещение этого конца, а интеграл

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_{x=0} dt \quad (15)$$

представляет работу, которую надо затратить на перемещение конца $x = 0$. Аналогичный смысл имеет слагаемое, соответствующее $x = l$. Если концы струны закреплены, то работа на концах струны будет равна нулю (при этом $u(0, t) = 0$,

$u_i(0, t) = 0$). Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $u = 0$ в положение $u_0(x)$ работа не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [u_0(x)]^2 dx, \quad (16)$$

потенциальной энергии струны в момент $t = t_0$ с обратным знаком. Таким образом, полная энергия струны равна

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x) (u_t)^2] dx. \quad (17)$$

Совершенно аналогично может быть получено выражение для потенциальной энергии продольных колебаний стержня. Впрочем, его можно получить также, исходя из формулы для потенциальной энергии упругого стержня

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 l_0,$$

где l_0 — начальная длина стержня, l — конечная длина. Отсюда непосредственно следует:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах.

Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока i и напряжением v , которые являются функциями положения точки x и времени t . Применяя закон Ома к участку длиной dx , можно написать, что падение напряжения на элементе провода dx равняется сумме электродвижущих сил:

$$-v_x dx = iR dx + iL dx, \quad (18)$$

где R и L — сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины.

Количество электричества, притекающее на элемент провода dx за время dt

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] dt = -i_x dx dt, \quad (19)$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента dx , и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции.

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)] dx + G dx \cdot v dt = (Cv_t + Gv) dx dt, \quad (20)$$

где C и G — коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь мы считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (18), (19) и (20) получаем систему

$$\left. \begin{aligned} i_x + Cv_t + Gv &= 0, \\ v_x + Li_t + Ri &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

называемую системой телеграфных уравнений¹⁾.

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию i , продифференцируем первое равенство (21) по x , второе — по t , умножив его на C . Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Заменяя v_x его значением из второго уравнения (21), получим уравнение для силы тока

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi. \quad (22)$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv. \quad (23)$$

Уравнение (22) или (23) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало ($G \cong R \cong 0$), то мы приходим к известному уравнению колебаний

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}} \right). \quad (24)$$

5. Поперечные колебания мембраны. Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур C . Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны.

Пусть ds — элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку $M(x, y)$. На этот элемент действует натяжение, равное $T ds$. Вектор T вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу ds . Можно показать, что отсутствие сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента ds , так что вектор натяжения $T = T(x, y, z)$ является функцией x , y и z . Эти

¹⁾ Эти уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку они не учитывают электромагнитных колебаний в среде, окружающей провод.

(18) = (20)

82-

- 83 -

8. Полуограниченная трубка ($x > 0$), заполненная идеальным газом, в одном конце, $x = 0$, свободно перемещающийся поршень массы M . В момент времени $t = 0$ поршень при помощи удара сообщает начальную скорость v_0 . Найти процесс распространения волны в газе, если известно что начальные отклонения и начальная скорость частиц газа равны нулю. Указание. Рассмотреть решение уравнения колебаний в области $x > 0$. Использовать граничное условие

$$Mu_{tt}(0, t) = S p_0 u_x(0, t)$$

— начальное давление газа, S — площадь поперечного сечения трубки,

$\frac{c_p}{c_v}$ и начальные условия на границе $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

9. Бесконечная струна, имеющая в точке $x = 0$ сосредоточенную массу M , находится в положении равновесия. В начальный момент времени $t = 0$ удар молоточка массой M сообщает начальную скорость v_0 . Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, указанный на рис. 22. $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x-at)} \right] & \text{при } x - at < 0 \text{ (прямая волна),} \\ 0 & \text{при } x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)} \right] & \text{при } x + at < 0 \text{ (обратная волна),} \\ 0 & \text{при } x + at > 0. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться условием

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

10. Решить задачу о распространении электрических колебаний в бесконечном проводе при условии

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

при произвольных начальных условиях.

11. Найти решение интегрального уравнения колебаний для полуограниченной струны при граничных условиях третьего рода (см. п. 9).

12. На конце $x = 0$ полуограниченного стержня укреплен мембрана, вызывающая сопротивление продольным колебаниям стержня, пропорциональное скорости $u_t(0, t)$. Найти процесс колебания, если заданы начальные условия и $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

3. Метод разделения переменных

1. Уравнение свободных колебаний струны. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение указанной задачи мы рассмотрим с исчерпы-

вающей подробностью и при дальнейшем изложении курса будем ссылаться на этот параграф, опуская повторения доказательств.

Итак, будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (1)$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (5)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x , $T(t)$ — функция только переменного t .

Подставляя предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1), получим:

$$X''T = \frac{1}{a^2} T''X$$

или, после деления на XT ,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (6)$$

Чтобы функция (5) была решением уравнения (1), равенство (6) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0 < x < l$, $t > 0$. Правая часть равенства (6) является функцией только переменного t , а левая — только x . Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части

равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \quad (7)$$

где λ — постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \neq 0, \quad (8)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \neq 0. \quad (9)$$

Граничные условия (4) дают:

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l) T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (10)$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти те значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\left. \begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) &= X(l) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (11). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма — Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}, \quad X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l \sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \quad \text{и} \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α — действительно и положительно, так что $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0 \quad (12)$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

где D_n — произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ , равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad (13)$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \quad (14)$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right), \quad (15)$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1) — (3), заключаем, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \quad (16)$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых зависит только от x , другая — от t . Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1) — (3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x \quad (17)$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). На этом вопросе мы подробнее остановимся несколько позже (см. п. 3 этого параграфа). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n . Потребуем, чтобы функция (17)

удовлетворяла условиям (3):

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \sin\frac{\pi n}{l} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \leq x \leq l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad (19) \quad (19)$$

где¹⁾

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (20) \quad (20)$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad (21)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (22)$$

¹⁾ Обычно рассматриваются периодические функции с периодом $2l$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n}{l} x + b_n \sin\frac{\pi n}{l} x \right),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \cos\frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Если функция $F(x)$ нечетна, то $a_n = 0$, так что

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l} x; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} F(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi$$

Если функция $F(x)$ задана только в промежутке $(0, l)$, то мы можем продолжить ее нечетно и вести разложение в промежутке от $-l$ до $+l$, что приводит нас к формулам (19) и (20). (См. Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.)

Сравнение этих рядов с формулами (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n, \end{array} \right. \quad (23)$$

чем полностью определяется функция (17), дающая решение исследуемой задачи.

Мы определили решение в виде бесконечного ряда (17). Если ряд (17) расходится или функция, определяемая этим рядом, не является дифференцируемой, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения.

В настоящем пункте мы ограничимся формальным построением решения. Выяснение условий, при которых ряд (17) сходится и представляет решение, будет проведено в п. 3.

2. Интерпретация решения. Обратимся теперь к интерпретации полученного решения. Функцию $u_n(x, t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \left(A_n \cos \left(\frac{\pi n}{l} a t \right) + B_n \sin \left(\frac{\pi n}{l} a t \right) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x = \\ &= a_n \cos \left(\frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a \delta_n = -\operatorname{arctg} \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

Каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания

$$u_n(x_0, t) = a_n \cos \left[\frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x_0$$

с амплитудой

$$a_n \sin \frac{\pi n}{l} x_0.$$

Движение струны такого типа называется стоячей волной. Точки $x = m \frac{l}{n}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$), в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = 0$, в течение всего процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x, t)$. Точки $x = \frac{2m+1}{2n} l$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$), в которых $\sin \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой a_n и называются пучностями стоячей волны.

Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет синусоиду

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$C_n(t) = a_n \cos \omega_n (t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right).$$

В момент времени t , при котором $\cos \omega_n (t + \delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t , при которых $\cos \omega_n (t + \delta_n) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \quad (26)$$

Частоты ω_n называются собственными частотами колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a^2 = T/\rho$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (27)$$

Энергия n -й стоячей волны (n -й гармоники) для случая поперечных колебаний струны равна

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n (t + \delta_n) \sin^2 \frac{\pi n}{l} x + \right. \\ &\quad \left. + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n (t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \right] dx = \\ &= \frac{a_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega_n^2 \sin^2 \omega_n (t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cos^2 \omega_n (t + \delta_n) \right], \end{aligned} \quad (28)$$

так как

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{l}{2}.$$

Пользуясь выражением для α_n , ω_n , а также равенством $T = a^2 \rho$, получаем:

$$E_n = \frac{\rho a_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \quad (29)$$

где $M = l\rho$ — масса струны.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний

нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наложением «простых тонов», соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тона не является операцией только математического характера. Выделение простых тонов можно произвести экспериментально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создавать струна, определяется самой низкой собственной частотой $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ и называется основным тоном струны.

Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1 , называются обертонами. Тембр звука зависит от присутствия наряду с основным тоном обертонов и от распределения энергии по гармоникам.

Низший тон струны и ее тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяет начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

через которые выражаются коэффициенты A_n и B_n . Если $A_1 = B_1 = 0$, то низшим тоном будет тон, соответствующий частоте ω_n , где n — наименьшее число, для которого A_n или B_n отличны от нуля.

Обычно струна издает один и тот же тон. В самом деле, приведем струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону и отпуская без начальной скорости. В этом случае

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

и

$$A_1 = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi}{l} \xi d\xi > 0,$$

так как

$$\sin \frac{\pi}{l} \xi > 0.$$

Следующие коэффициенты, вообще говоря, значительно меньше A_1 , так как функция $\sin \frac{n\pi}{l} \xi$ знакопеременна при $n \geq 2$. В частности, если $\varphi(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $A_2 = 0$. Таким образом, если привести струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону ($\varphi(x) > 0$), то низшим тоном будет основной тон струны, энергия которого, вообще говоря, больше энергии других гармоник.

Привести струну в колебание можно и другими способами. Например, если начальная функция нечетна относительно середины струны, то

$$A_1 = 0$$

и низший тон соответствует частоте

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то звук ее резко меняется и она звучит в октаву к своему тону. Этот прием изменения тона часто применяется при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах и носит название флажолета. С точки зрения теории колебания струн это явление совершенно ясно. В момент прикосновения к середине струны мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняем лишь гармоники, имеющие в этой точке узлы. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если прикоснуться к струне на расстоянии $1/3$ ее длины от края, то высота основного тона повышается втрое, так как при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = l/3$.

Формулы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{T}}, \quad (30)$$

определяющие частоту и, соответственно, период основного колебания, объясняют следующие законы колебания струн, открытые впервые экспериментально (законы Мерсена).

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебания струны пропорционален ее длине.

2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Эти правила легко демонстрируются на монохорде.

В настоящем пункте мы рассмотрели стоячие волны, возникающие при колебании струны с закрепленными концами. Вопрос о существовании решения вида

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

Пример here - с заданной начальной функцией

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sin \frac{3\pi}{l} x$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

Тогда $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$, где

$$A_n \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \left(\frac{n\pi}{l} \xi \right) d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \sin \left(\frac{3\pi}{l} \xi \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} \xi \right) d\xi = \left(\int_0^l \sin p \cos q = \frac{1}{2} [\cos(p-q) - \cos(p+q)] \right)$$

$$= \frac{1}{l} \left[\int_0^l \cos \left[\frac{n}{l} (3-n) \xi \right] d\xi - \int_0^l \cos \left[\frac{n}{l} (3+n) \xi \right] d\xi \right] =$$

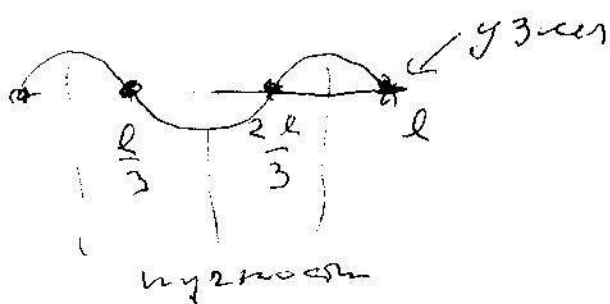
$$= \frac{1}{l} \left[\frac{l}{n(3-n)} \sin \frac{n}{l} (3-n) \xi \Big|_0^l - \frac{l}{n(3+n)} \sin \frac{n}{l} (3+n) \xi \Big|_0^l \right]$$

Узнав, что $n \neq 3$, то $\varphi_n = 0$; $\varphi_3 = 1$.

т.е. $A_n \varphi_n = \varphi_n = 1$; $B_n = \frac{1}{n\pi a} \psi_n = 0$, т.

получим

$$u(x, t) = u_3(x, t) = \cos \left(\frac{3\pi}{l} a t \right) \cdot \sin \frac{3\pi}{l} x$$



Особый случай

$$\omega_3 = \frac{3\pi}{l} a$$

Обсуждение

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (y = a^2 t)$$

обычно называют уравнением теплопроводности.

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач

1. **Линейная задача о распространении тепла.** Рассмотрим однородный стержень длины l , теплоизолированный с боков и достаточно тонкий, чтобы в любой момент времени температуру во всех точках поперечного сечения можно было считать одинаковой. Если концы стержня поддерживать при постоянных температурах u_1 и u_2 , то, как хорошо известно, вдоль стержня устанавливается линейное распределение температуры (рис. 36)

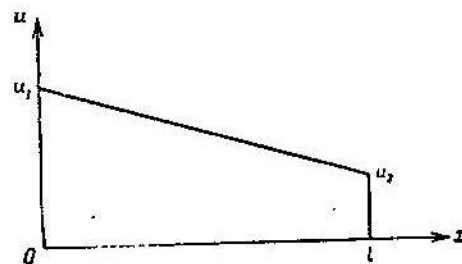


Рис. 36.

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \quad (1)$$

При этом от более нагретого к менее нагретому концу стержня будет перетекать тепло. Количество тепла, протекающее через сечение стержня площади S за единицу времени, дается экспериментальной формулой

$$Q = -k \frac{u_2 - u_1}{l} S = -k \frac{\partial u}{\partial x} S, \quad (2)$$

где k — коэффициент теплопроводности, зависящий от материала стержня.

Величина теплового потока считается положительной, если тепло течет в сторону возрастания x .

Рассмотрим процесс распространения температуры в стержне. Этот процесс может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей температуру в сечении x в момент времени t . Найдем уравнение, которому должна удовлетворять функция $u(x, t)$.

Рассмотрим процесс, связанный с распространением температуры в стержне.

1. **Закон Фурье.** Если температура тела неравномерна, то в нем возникают тепловые потоки, направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой.

Количество тепла, протекающее через сечение x за промежуток времени $(t, t + dt)$, равно

$$dQ = qS dt, \quad (3)$$

где

$$q = -k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

— плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекающего в единицу времени через площадь в 1 см^2 . Этот закон представляет обобщение формулы (2). Ему можно также придать интегральную форму

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt, \quad (5)$$

где Q — количество тепла, протекающее за промежуток времени (t_1, t_2) через сечение x . Если стержень неоднороден, то k является функцией x .

2. **Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на Δu , равно**

$$Q = cm \Delta u = c\rho V \Delta u, \quad (6)$$

где c — удельная теплоемкость, m — масса тела, ρ — его плотность, V — объем.

Если изменение температуры имеет различную величину на разных участках стержня или если стержень неоднороден, то

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S \Delta u(x) dx. \quad (7)$$

3. **Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. д.). Выделение тепла может быть характеризовано**

плотностью тепловых источников $F(x, t)$ в точке x в момент t^1). В результате действия этих источников на участке стержня $(x, x + dx)$ за промежуток времени $(t, t + dt)$ выделится количество тепла

$$dQ = SF(x, t) dx dt \quad (8)$$

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt, \quad (9)$$

где Q — количество тепла, выделяющегося на участке стержня (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) .

Уравнение теплопроводности получается при подсчете баланса тепла на некотором отрезке (x_1, x_2) за некоторый промежуток времени (t_1, t_2) . Применяя закон сохранения энергии и пользуясь формулами (5), (7) и (9), можно написать равенство

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi, \quad (10) \end{aligned}$$

которое и представляет уравнение теплопроводности в интегральной форме.

Чтобы получить уравнение теплопроводности в дифференциальной форме, предположим, что функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные u_{xx} и u_t ²⁾.

Пользуясь теоремой о среднем, получаем равенство

$$\begin{aligned} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_2} - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \Big|_{x=x_1} \right]_{\tau=t_1}^{\tau=t_2} \Delta t + F(x_1, t_1) \Delta x \Delta t = \\ = [c\rho [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]]_{\xi=x_1}^{\xi=x_2} \Delta x, \quad (11) \end{aligned}$$

¹⁾ Если, например, тепло выделяется в результате прохождения электрического тока силы I по стержню, сопротивление которого на единицу длины равно R , то $F = 0,24 \cdot I^2 R$.

²⁾ Требуя дифференцируемости функций $u(x, t)$, мы, вообще говоря, можем потерять ряд возможных решений, удовлетворяющих интегральному уравнению, но не удовлетворяющих дифференциальному уравнению. Однако в случае уравнений теплопроводности, требуя дифференцируемости решения, мы фактически не теряем возможных решений, так как можно доказать, что если функция удовлетворяет уравнению (10), то она обязательно должна быть дифференцируема.

которое при помощи теоремы о конечных приращениях можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \Delta t \Delta x + F(x_1, t_1) \Delta x \Delta t =$$

где t_3, t_4, t_5 и x_3, x_4, x_5 — промежуточные точки интервалов (t_1, t_2) и (x_1, x_2) .

Отсюда, после сокращения на произведение $\Delta x \Delta t$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} + F(x, t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \quad (13)$$

Все эти рассуждения относятся к произвольным промежуткам (x_1, x_2) и (t_1, t_2) . Переходя к пределу при $x_1, x_2 \rightarrow x$ и $t_1, t_2 \rightarrow t$, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (14)$$

называемое уравнением теплопроводности.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Если стержень однороден, то k, c, ρ можно считать постоянными, и уравнение обычно записывают в виде

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ a^2 &= \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho}, \end{aligned}$$

где a^2 — постоянная, называемая коэффициентом температуропроводности. Если источники отсутствуют, т. е. $F(x, t) = 0$, то уравнение теплопроводности принимает простой вид:

$$u_t = a^2 u_{xx}. \quad (14')$$

2. Плотность тепловых источников может зависеть от температуры. В случае теплообмена с окружающей средой, подчиняющегося закону Ньютона, количество тепла, теряемого стержнем¹⁾, рассчитанное на единицу длины и времени, равно

$$F_0 = h(u - \theta),$$

¹⁾ Поскольку в нашем приближении не учитывается распределение температуры по сечению, то действие поверхностных источников эквивалентно действию объемных источников тепла.

где $\theta(x, t)$ — температура окружающей среды, h — коэффициент теплообмена. Таким образом, плотность тепловых источников в точке x в момент t равна

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \quad (15)$$

с боковым теплообменом имеет следующий вид:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

где $\alpha = \frac{h}{cp}$; $f(x, t) = \alpha \theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{cp}$ — известная функция.

3. Коэффициенты k и c , как правило, являются медленно меняющимися функциями температуры. Поэтому сделанное выше предположение о постоянстве этих коэффициентов возможно лишь при условии рассмотрения небольших интервалов изменения температуры. Изучение температурных процессов в большом интервале изменения температур приводит к квазилинейному уравнению теплопроводности, которое для неоднородной среды запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t) = C(u, x) \rho(u, x) \frac{\partial u}{\partial t}$$

(см. приложение III).

2. Уравнение диффузии. Если среда неравномерно заполнена газом, то имеет место диффузия его из мест с более высокой концентрацией в места с меньшей концентрацией. Это же явление имеет место и в растворах, если концентрация растворенного вещества в объеме не постоянна.

Рассмотрим процесс диффузии в полый трубке или в трубке, заполненной пористой средой, предполагая, что во всякий момент времени концентрация газа (раствора) по сечению трубки одинакова. Тогда процесс диффузии может быть описан функцией $u(x, t)$, представляющей концентрацию в сечении x в момент времени t .

Согласно закону Фика масса газа, протекающая через сечение x за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, равна

$$dQ = -D \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) S dt = W S dt, \quad (16)$$

$$W = -D \frac{\partial u}{\partial x},$$

где D — коэффициент диффузии, S — площадь сечения трубки, $W(x, t)$ — плотность диффузионного потока, равная массе газа, протекающей в единицу времени через единицу площади.

По определению концентрации, количество газа в объеме V равно

$$Q = uV;$$

отсюда получаем, что изменение массы газа на участке трубки (x_1, x_2) при изменении концентрации на Δu равно $\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x) S \Delta u dx$

где $c(x)$ — коэффициент пористости¹⁾.

Составим уравнение баланса массы газа на участке (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2) :

$$S \int_{t_1}^{t_2} \left[D(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, \tau) \right] d\tau =$$

$$= S \int_{x_1}^{x_2} c(\xi) [u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)] d\xi.$$

Отсюда, подобно п. 1, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) = c \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (17)$$

являющееся уравнением диффузии. Оно вполне аналогично уравнению теплопроводности. При выводе этого уравнения мы считали, что в трубке нет источников вещества и диффузия через стенки трубки отсутствует. Учет этих явлений приводит к уравнениям, сходным с уравнениями (14) и (15) (см. гл. VI, § 2, п. 3).

Если коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии принимает вид

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{где } a^2 = D/c.$$

Если коэффициент пористости $c = 1$, а коэффициент диффузии постоянен, то уравнение диффузии имеет вид

$$u_t = D u_{xx}.$$

3. Распространение тепла в пространстве. Процесс распространения тепла в пространстве может быть характеризуем температурой $u(x, y, z, t)$ являющейся функцией x, y, z и t .

Если температура непостоянна, то возникают тепловые потоки, направленные от мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой.

¹⁾ Коэффициентом пористости называется отношение объема пор к полному объему V_0 , равному в нашем случае $S dx$.

Функция $v(x, t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, ограничена во всей области

$$|v(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0)$$

и удовлетворяет условию

$$v(x, 0) = 0.$$

неприменим, так как в неограниченной области функция $v(x, t)$ может нигде не достигать максимальных значений. Чтобы воспользоваться этим принципом, рассмотрим область

$$|x| \leq L,$$

где L — вспомогательное число, которое затем будем неограниченно увеличивать, и функцию

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right). \quad (25)$$

Функция $V(x, t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, в чем нетрудно убедиться дифференцированием, и кроме того, обладает следующими свойствами:

$$V(x, 0) \geq |v(x, 0)| = 0,$$

$$V(\pm L, t) \geq 2M \geq |v(\pm L, t)|. \quad (26)$$

Для ограниченной области $|x| \leq L, 0 \leq t \leq T$ справедлив принцип максимального значения. Применяя следствие 2 из предыдущего пункта для функции $\bar{u} = -V(x, t)$, $\bar{u} = v(x, t)$ и $\bar{u} = V(x, t)$ и учитывая (26), получаем:

$$-\frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \leq v(x, t) \leq \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

Фиксируем некоторые значения (x, t) и, воспользовавшись произволом выбора L , будем его неограниченно увеличивать. Переходя к пределу при $L \rightarrow \infty$, получим:

$$v(x, t) \equiv 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Метод разделения переменных

Заметка 1. Однородная краевая задача. Перейдем к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, t > 0) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (t \geq 0). \quad (3)$$

Изучение общей первой краевой задачи начнем с решения

$\leq t \leq T$) решение однородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad \text{Заметка 1} \quad (4)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

и однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (5)$$

и представимое в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (6)$$

где $X(x)$ — функция только переменного x , $T(t)$ — функция только переменного t .

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на $a^2 X T$, получим:

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (7)$$

где $\lambda = \text{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t , а правая — только от x .

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (8)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (8')$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (9)$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма — Лиувилля)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (10)$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе II

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (12)$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad (13)$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (14)$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (1). Составим формально ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (15)$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (16)$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентами C_n , определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (1). Для этого надо доказать, что

функция $u(x, t)$, определяемая рядом (15), дифференцируема, удовлетворяет уравнению в области $0 < x < l$, $t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Так как уравнение (4) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет

§ 3, п. 3). Покажем, что при $t \geq \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ — любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно. В самом деле,

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}$$

В дальнейшем будут сформулированы дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда

$$|C_n| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi \right| < 2M,$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \quad \text{для } t \geq \bar{t}$$

и аналогично

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \quad \text{для } t \geq \bar{t}.$$

Вообще

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u_n}{\partial t^k \partial x^k} \right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+1} \cdot n^{2k+1} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \quad \text{для } t \geq \bar{t}.$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}. \quad (15)$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^q}{n^q} \frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 (n^2+2n+1)t}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 t}} =$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (15) любое число раз в области $t \geq \bar{t} > 0$. Далее, пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что функция, определенная этим рядом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности $\bar{t}$ это имеет место для всех $t > 0$. Тем самым доказано, что при $t > 0$ ряд (15) представляет функцию, дифференцируемую нужное число раз и удовлетворяющую уравнению (4)¹⁾.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(l) = 0$, то ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (15)$$

определяет непрерывную функцию при $t \geq 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \quad (\text{при } t \geq 0, 0 \leq x \leq l)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (15) при $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ ²⁾.

Итак, задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью.

¹⁾ При доказательстве того, что ряд (15) удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $t > 0$, была использована только ограниченность коэффициентов Фурье C_n , которая, в частности, будет иметь место для любой ограниченной $\varphi(x)$.

²⁾ См. гл. II, § 3, п. 3.

2. **Функция источника.** Преобразуем полученное решение (15), заменяя C_n их значениями:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования всегда законно при $t > 0$ в силу того, что ряд в скобках сходится равномерно по ξ при $t > 0$ ¹⁾.

Обозначим

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi. \quad (18)$$

Пользуясь функцией $G(x, \xi, t)$, можно представить функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Функция $G(x, \xi, t)$ называется функцией мгновенного точечного источника или, более подробно, функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Покажем, что функция источника $G(x, \xi, t)$, рассматриваемая как функция x , представляет распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ в момент времени t , если температура в начальный момент $t = 0$ равна нулю и в этот момент в точке $x = \xi$ мгновенно выделяется некоторое количество тепла (величину которого мы определим позже), а на краях стержня все время поддерживается нулевая температура.

Выражение «количество тепла Q , выделяющееся в точке ξ » обозначает, как обычно, что мы имеем дело с теплом, выделяющимся на «небольшом» интервале около изучаемой точки ξ .

¹⁾ Ряд $\sum a_n$, где a_n определяется формулой (15'), при $q = 0$ является мажорантным для ряда, стоящего в скобках.

Изменение температуры $\varphi_\varepsilon(\xi)$, вызываемое появлением тепла

интервала $\varphi_\varepsilon(\xi)$ можно считать положительной дифференцируемой функцией, для которой

$$\text{ср} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = Q, \quad (20)$$

так как левая часть этого уравнения и представляет количество тепла, вызвавшее изменение температуры на величину $\varphi_\varepsilon(\xi)$. Процесс распространения температуры в этом случае определяется формулой (19):

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi. \quad (21)$$

Совершим теперь предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$. Принимая во внимание непрерывность G при $t > 0$ и равенство (20) и применяя теорему среднего значения при фиксированных значениях x, t , будем иметь:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &= \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x, \xi, t) \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = \\ &= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{\text{ср}}, \end{aligned} \quad (21')$$

где ξ^* — некоторая средняя точка интервала $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. В силу непрерывности функции $G(x, \xi, t)$ по ξ при $t > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) &= \frac{Q}{\text{ср}} G(x, \xi, t) = \\ &= \frac{Q}{\text{ср}} \cdot \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} \xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда следует, что $G(x, \xi, t)$ представляет температуру в точке x в момент t , вызванную действием мгновенного точечного источника мощности $Q = \text{ср}$, помещенного в момент $t = 0$ в точке ξ промежутка $(0, l)$.

Отметим следующее свойство функции $G(x, \xi, t)$: функция $G(x, \xi, t) \geq 0$ при любых x, ξ и $t > 0$. Действительно, рассмотрим начальную функцию $\varphi_\varepsilon(x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и соответствующее ей решение (21'). Из неотрицательности начального и граничных условий в силу

принципа максимального значения следует, что

$$u_\varepsilon(x, t) \geq 0$$

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t) \frac{Q}{\text{ср}} \geq 0 \quad (\text{при } t > 0). \quad (21'')$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, из (21'') получим неравенство $G(x, \xi, t) \geq 0$ при $0 \leq x, \xi \leq l$ и $t > 0$,

которое и надо было доказать.

Этот результат имеет простой физический смысл. Однако установить его непосредственно из формулы (19) было бы затруднительно, поскольку $G(x, \xi, t)$ представляется знакпеременным рядом.

3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями. Изложенная выше теория относится к решениям уравнения теплопроводности, непрерывным в замкнутой области $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$. Эти условия непрерывности являются весьма ограничительными. В самом деле, рассмотрим простейшую задачу об остывании равномерно нагретого стержня при нулевой температуре на краях. Дополнительные условия имеют вид

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Если $u_0 \neq 0$, то решение этой задачи должно быть разрывным в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$. Этот пример показывает, что поставленные выше условия непрерывности начального значения и условия сопряжения его с граничными значениями исключают из рассмотрения практически важные случаи. Однако формула (19) дает решение краевой задачи и в этом случае.

В приложениях часто пользуются формулами, выходящими за границы условий их применимости, зачастую вообще не ставя вопроса об условии применимости формул. Последовательное обоснование всех формул было бы весьма громоздким и часто отвлекало бы внимание исследователя от количественных и качественных сторон явления, характерных для физической сущности процесса.

Однако мы считаем нужным, по крайней мере на простейших примерах, дать обоснование математического аппарата, достаточное для решения основных задач.

Рассмотрим краевые задачи с кусочно-непрерывными начальными функциями, не предполагая, что начальная функция сопряжена с граничными условиями. Этот класс дополнительных условий является достаточно общим для потребностей практики и достаточно простым для изложения теории. Нашей

откуда

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(x, t) &\leq \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon, \\ \underline{u}(x, t) &\geq \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon \end{aligned} \right\} \text{ для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon).$$

Отсюда получаем неравенства

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leq u(x, t) \leq \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$$

или

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для } |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать. Ограниченность функции $|u(x, t)|$ следует из (25) и из ограниченности функций $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$.

Этим теорема доказана.

4. Неоднородное уравнение теплопроводности. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) \equiv 0 \quad (26)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем искать решение этой задачи $u(x, t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (11), т. е. по функциям $\left\{ \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (27)$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x, t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$ в виде ряда

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \quad (28)$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}_n(t) - f_n(t) \right\} = 0.$$

$$\dot{u}_n(t) = -a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 u_n(t) + f_n(t). \quad (29)$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \quad (30)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (29) с нулевым начальным условием (30)¹⁾, находим:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) \, d\tau. \quad (31)$$

Подставляя выражение (31) для $u_n(t)$ в формулу (27), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) \, d\tau \right] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (32)$$

Воспользуемся выражением (28) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (32):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau = \\ &= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \quad (34)$$

совпадает с функцией источника, определяемой формулой (18).

¹⁾ См. мелкий шрифт в конце п. 4, § 3, гл. II.

Выясним физический смысл полученного решения

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (33)$$

Предположим, что функция $f(\xi, \tau)$ непрерывна в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + \Delta \tau.$$

Функция $F(\xi, \tau) = c\rho f(\xi, \tau)$ представляет плотность тепловых источников. Общее количество тепла, выделяющееся на отрезке $(0, l)$ за все время действия источника (т. е. за $\Delta \tau$), равно

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} c\rho f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (35)$$

Применим теорему о среднем к выражению

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \Delta \tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0 + \Delta \xi} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = G(x, \bar{\xi}, t - \bar{\tau}) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x, t), \end{aligned}$$

где

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta \xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta \tau.$$

Переходя к пределу при $\Delta \xi \rightarrow 0$ и $\Delta \tau \rightarrow 0$, получим функцию

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta \xi \rightarrow 0 \\ \Delta \tau \rightarrow 0}} \bar{u}(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t - \tau_0), \quad (36)$$

которую можно интерпретировать как функцию влияния мгновенного источника тепла, сосредоточенного в точке ξ_0 в момент τ_0 .

Если известна функция $\frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t - \tau)$, представляющая действие единичного мгновенного сосредоточенного источника, то действие источников, непрерывно распределенных с плотностью $F(x, t) = c\rho f(x, t)$, должно выражаться формулой (33), как это непосредственно следует из физического смысла функции $G(x, \xi, t - \tau)$.

Итак, температурное влияние тепловых источников, действующих в области $(\xi_0, \xi_0 + \Delta \xi)(\tau_0, \tau_0 + \Delta \tau)$, дается выражением

$$G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) \Delta \xi \Delta \tau \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi, \tau) \Delta \xi \Delta \tau \right).$$

Если источники распределены непрерывно, то, суммируя тепловые влияния источников, действующих во всей области $0 \leq \xi \leq l, 0 \leq \tau \leq t$, получим после предельного перехода при $\Delta \xi \rightarrow 0$ и $\Delta \tau \rightarrow 0$

Таким образом, исходя из физического смысла функции источника $G(x, \xi, t)$, можно было бы сразу написать выражение (33) для функции, дающей решение неоднородного уравнения.

Имея форму, в которой должно представляться решение задачи, можно исследовать условия применимости этой формулы в отношении функции $f(\xi, \tau)$. Мы не будем проводить этого исследования.

Мы рассматривали здесь неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Если начальное условие отлично от нуля, то к этому решению следует прибавить решение однородного уравнения с заданным начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, найденное в п. 1.

5. **Общая первая краевая задача.** Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1)$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \quad (37)$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x, t),$$

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$

$$v(0, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$

$$v(l, t) = \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

-1 тупица + обшар згара.

Обшар негбай упробен згара (N3)

$$u_t = a^2 u_{xx} + F(x, t) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \Phi(x) \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t) \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Богдот тавтай упробен хөөрөөр б. бөгөөд

$$u(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t) + U(x, l, t)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_{1t} &= a^2 v_{1xx} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$v_1(x, 0) = \Phi(x) \equiv \Phi(x) - U(x, 0) \quad (5)$$

$$v_1(0, t) = v_1(l, t) = 0 \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_{2t} &= a^2 v_{2xx} + f(x, t), \text{ үе } (7) \end{aligned} \right.$$

$$f(x, t) = f(x, t) + a^2 U_{xx} - U_t(x, t)$$

$$v_2(x, 0) = 0, \quad (8)$$

$$v_2(0, t) = v_2(l, t) = 0, \quad (9)$$

$U(x, t)$ - загварууд $\Phi \rightarrow 0$, т.г.

$$\left\{ \begin{aligned} U(0, t) &= \mu_1(t) \\ U(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$U(x, t) = \mu_2(t)$$

тупица, $U = \mu_2(t) + \frac{x}{l} (\mu_2(t) - \mu_1(t))$ (11)

Орлогно, $u(x, t)$ гэр. гэр. (11-13)
Действит.

$$\begin{aligned} u_t &= v_{1t} + v_{2t} + U_t = a^2 v_{1xx} + a^2 v_{2xx} + F = v_t \\ &+ a^2 U_{xx} + U_t = a^2 u_{xx} + F \\ &= a^2 u_{xx} + F. \end{aligned} \quad (11)$$

- 3 принцип -

Нормальная распределение температуры

$$\Phi(x) = T_0 \sin\left(\frac{\pi m_0}{l} x\right) [K] + T_1 + \frac{x}{l} (T_2 - T_1)$$

Упр. теплопроводности

$$\rho C_p \frac{\partial u}{\partial t} = \rho K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q_0$$

ρ - плотность, C_p - теплоемкость, K - коэффициент теплопроводности, q_0 - плотность теплового потока

$$\left[\frac{J}{K \cdot K^2} \right], K - коэффициент теплопроводности $\left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$$

Итак, в уравнении теплопроводности

Упр. теплопроводности в беге (1), где

$$a^2 = \frac{K}{\rho C_p}; \quad F(x, t) = \frac{q_0}{S \cdot C_p} \sin\left(\frac{\pi m_0}{l} x\right)$$

$$\mu_1 = T_1 = \text{const}; \quad \mu_2 = T_2 = \text{const}$$

$$\Phi(x) = T_0 \sin\left(\frac{\pi m_0}{l} x\right) + T_1 + \frac{x}{l} (T_2 - T_1)$$

Оммунация, то $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

Поэтому

$$\sum_{n,k} = \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l [\cos\left(\frac{\pi}{l} (n-k)x\right) -$$

$$- \cos\left(\frac{\pi}{l} (n+k)x\right)] dx = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{l} (n-k)x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{l} (n+k)x\right) \right]_0^l =$$

$$= \frac{l}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{l} (n-k)l\right) - \sin\left(\frac{\pi}{l} (n+k)l\right) \right] = \frac{l}{2\pi} \left[\sin(n-k) - \sin(n+k) \right]$$

Если $n \neq k$, то n, k - целые числа, то $\sin(n-k) = 0$, $\sin(n+k) = 0$, $\sum_{n,k} = 0$.

Если $n = k$, то $\sin(n-k) = 0$, $\sin(n+k) = 0$, $\sum_{n,k} = 0$.

$$\text{но для } n=k \quad \frac{1}{2} \int_0^l dx = \frac{l}{2}; \quad \text{т.е. } \sum_{n,k} = \frac{l}{2}$$

- 4 \pi r u m a r -

1) Homogeneous $V_1(x, t)$. Значит $\varphi(x) = T_0 \sin\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} x\right)$ (ср. 2)

$$V_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx, \text{ где}$$

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi\left(\frac{x}{l}\right) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{2T_0}{l} \sum_{n, n_{m_0}} =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq n_{m_0} \\ T_0, & n = n_{m_0} \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$V_1(x, t) = T_0 e^{-\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} x\right);$$

Homogeneous $V_2(x, t)$. Corresponding to eq. 2

$f = f$ no time

$$V_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau$$

$$f_n(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{f_0}{\sin p} \cdot 2 \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} x\right) dx =$$

$$= \frac{f_0}{\sin p} \sum_{n, n_{m_0}} = \begin{cases} 0, & n \neq n_{m_0} \\ \frac{f_0}{\sin p}, & n = n_{m_0} \end{cases}$$

Therefore

$$V_2(x, t) = \sin\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} x\right) \cdot \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \frac{f_0}{\sin p} d\tau$$

$$= \frac{f_0}{\sin p} \cdot \sin\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} x\right) \left(\frac{l}{\pi n_{m_0} a}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} a\right)^2 (T-t)} \Big|_0^t =$$

$$= \frac{f_0}{\sin p} \sin\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} x\right) \left(\frac{l}{\pi n_{m_0} a}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n_{m_0}}{l} a\right)^2 t}\right]$$

- 5 parameters -

0.5 sec here - l : $-\left(\frac{\pi n_0}{l}\right)^2 a^2 t$

$$u(x, t) = T_0 \sin\left(\frac{\pi n_0}{l} x\right) e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l}\right)^2 a^2 t} +$$

$$+ \frac{Y_0 \cdot l^2}{8 K \pi^2 n_0^2} \sin\left(\frac{\pi n_0}{l} x\right) \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi n_0}{l}\right)^2 a^2 t}\right] +$$

$$+ T_1 + \frac{x}{l} [T_2 - T_1]$$

U

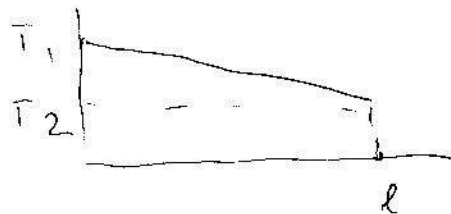
when $t \rightarrow \infty$

$$u(x, t) \rightarrow \frac{Y_0 l^2}{8 K \pi^2 n_0^2} \sin\left(\frac{\pi n_0}{l} x\right) + T_1 + \frac{x}{l} [T_2 - T_1]$$

Because, when $Y_0 = 0$ (no insulation),

$$u(x, t) \rightarrow T_1 + \frac{x}{l} [T_2 - T_1]$$

u



УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Функция u называется гармонической в области T , если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач. Рассмотрим стационарное тепловое поле. В главе III было показано, что температура нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (a^2 = \frac{k}{c\rho}).$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y, z)$, не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (1)$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \quad (2)$$

где F — плотность тепловых источников, а k — коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют уравнением Пуассона.

Рассмотрим некоторый объем T , ограниченный поверхностью Σ . Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела T формулируется следующим образом:

найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \quad (2)$$

которое может быть взято в одном из

- I. $u = f_1$ на Σ (первая краевая задача),
- II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (вторая краевая задача),
- III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача),

где f_1, f_2, f_3, h — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности Σ ¹⁾.

Физический смысл этих граничных условий очевиден (см. гл. III, § 1). Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую задачу — задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0 , внутренней (или внешней) по отношению к поверхности Σ , то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля. В качестве второго примера рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников. Пусть внутри некоторого объема T с границей Σ имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризующееся скоростью $v(x, y, z)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость v является потенциальным вектором, т. е.

$$v = -\text{grad } \varphi, \quad (3)$$

где φ — скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$\text{div } v = 0. \quad (4)$$

Подставляя сюда выражение (3) для v , получим:

$$\text{div grad } \varphi = 0$$

¹⁾ Очевидно, что стационарное распределение температуры может установиться лишь при условии равенства нулю суммарного потока тепла через границу области. Отсюда следует, что функция f_2 должна удовлетворять дополнительному требованию:

$$\iint_{\Sigma} f_2 d\sigma = 0.$$

или

$$\Delta\varphi = 0, \quad (5)$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа. Пусть в однородной проводящей среде имеется стационар-

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (6)$$

Электрическое поле E определяется через плотность тока из дифференциального закона Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (7)$$

где λ — проводимость среды. Поскольку процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым или потенциальным¹⁾, т. е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$E = -\operatorname{grad} \varphi \quad (j = -\lambda \operatorname{grad} \varphi). \quad (8)$$

Отсюда на основании формул (6) и (7) заключаем, что

$$\Delta\varphi = 0, \quad (9)$$

т. е. потенциал электрического поля стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad (10)$$

т. е. поле является потенциальным и

$$E = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (8)$$

Пусть $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов, имеющих в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной $\epsilon = 1$. Исходя из основного закона электродинамики

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T \rho d\tau, \quad (11)$$

где T — некоторый объем, S — поверхность, его ограничивающая, $\sum e_i$ — сумма всех зарядов внутри T , и пользуясь теоремой Остроградского

$$\iint_S E_n dS = \iiint_T \operatorname{div} E d\tau, \quad (12)$$

¹⁾ Из второго уравнения Максвелла $\frac{1}{c} \dot{H} = -\operatorname{rot} E$ следует, что $\operatorname{rot} E = 0$.

получаем:

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho.$$

Подставляя сюда выражение (8) для E , будем иметь:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (13)$$

должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основные краевые задачи для рассмотренных процессов относятся к трем типам, приведенным выше. Мы не будем здесь останавливаться на некоторых других краевых задачах, характерных для различных физических процессов. Некоторые из этих задач будут приведены в приложениях.

3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат. Пусть в пространстве вместо декартовых координат x, y, z введены криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 с помощью соотношений

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \quad (14)$$

разрешая которые относительно x, y, z , можно написать

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \quad (15)$$

Полагая $q_1 = C_1, q_2 = C_2, q_3 = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные, получим три семейства координатных поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2, \quad f_3(x, y, z) = C_3. \quad (16)$$

и

Рассмотрим элемент объема в новых координатах, ограниченный тремя парами координатных поверхностей (рис. 44). Вдоль ребра AB $q_2 = \text{const}, q_3 = \text{const}$, вдоль AD $q_1 = \text{const}, q_2 = \text{const}$, вдоль AC $q_1 = \text{const}, q_3 = \text{const}$. Направляющие косинусы касательной к ребрам AB, AC и AD пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}.$$

Условие ортогональности ребер будет иметь вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k). \quad (17)$$

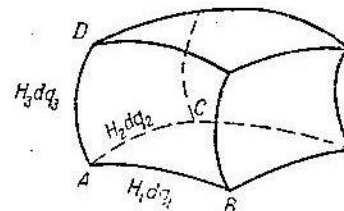


Рис. 44.

Подставляя значения H_1, H_2, H_3 в формулу (31), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0$$

или окончательно

2. Цилиндрические координаты. В этом случае $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$;

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

так что

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta_{\rho, \varphi, z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (33)$$

Если искомая функция u не зависит от z , то уравнение (33) упрощается:

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (34)$$

4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа. Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от одной переменной r или ρ .

Решение уравнения Лапласа $u = U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1 = 1, C_2 = 0$, получаем функцию

$$U_0 = \frac{1}{r}, \quad (35)$$

которую часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.

Аналогично, полагая

$$u = U(\rho)$$

и пользуясь уравнением (33) или (34), найдем решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Выбрав $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$, будем иметь

Функцию $U_0(\rho)$ часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости (для двух независимых переменных).

Функция $U_0 = \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где она обращается в бесконечность. С точностью до множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда e , помещенного в начале координат; потенциал этого поля равен

$$u = \frac{e}{r}.$$

Аналогично, функция $\ln \frac{1}{\rho}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $\rho = 0$, где она обращается в (положительную) бесконечность, и с точностью до множителя совпадает с полем заряженной линии (см. подробнее § 5, п. 2), потенциал которого равен

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

где e_1 — плотность заряда, рассчитанная на единицу длины. Эти функции имеют большое значение в теории гармонических функций.

5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного. Весьма общим методом решения двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

— некоторая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем u и v являются вещественными функциями переменных x и y . Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю многими способами. Для каждого из способов стремления